Probeklausur 07/08

Aufgabe 3

Sei $U = \{2a + 3b + bT + aT^2 \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}[T]$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}[T]$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

[*6 + 8 = 14 Punkte*]

WS 07/08

Aufgabe 3

Beweisen Sie, dass $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ ein Unterraum von $M_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[*4 Punkte*]

Nachklausur 07/08

Aufgabe 3

Sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad ≤ 3 über $\mathbb{R}$.

Sei $U = \{a + bT + aT^2 + (a + b)T^3 \mid a, b \in \mathbb{R}\}$.

1. Beweisen Sie, dass U ein Unterraum von V ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von U.

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

SS 09

Aufgabe 4

Sei X_0 eine fest gewählte Matrix in $M_{23}(\mathbb{R})$. Sei $V = \{A \in M_{22}(\mathbb{R}) \mid AX_0 = 0\}$. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum von $M_{22}(\mathbb{R})$ ist.

[*4 Punkte*]

WS 10/11

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$, und sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Für alle $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in M_{nn}(\mathbb{K})$ sei Spur(A) definiert durch Spur$(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$, also die Summe der Diagonalelemente von A.

1. Beweisen Sie, dass $V_n = \{A \in M_{nn}(\mathbb{K}) \mid \text{Spur}(A) = 0\}$ ein Unterraum von $M_{nn}(\mathbb{K})$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von $V_2 = \{A \in M_{22}(\mathbb{K}) \mid \text{Spur}(A) = 0\}$.

[*4 + 8 = 12 Punkte*]

SS 11

Aufgabe 3

Finden Sie einen 3-dimensionalen Unterraum von $\mathbb{R}^4$, der keinen einzigen Vektor der Standardbasis von $\mathbb{R}^4$ enthält.

[*10 Punkte*]

WS 11/12

Aufgabe 3

Sei $V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$.

1. Beweisen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.
2. Bestimmen Sie eine Basis von V.

[*4 + 6 = 10 Punkte*]

SS 12

Aufgabe 3

Sei $C[a, b]$ der Vektorraum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a, b]$ (Sie müssen nicht zeigen, dass dies ein Vektorraum ist). Zeigen Sie, dass

$$U = \{f \in C[a, b] \mid \int_a^b f(x)dx = 0\}$$

ein Unterraum von $C[a, b]$ ist.

[*6 Punkte*]

SS 14

Aufgabe 3

Untersuchen Sie für welche $t \in \mathbb{R}$ die folgende Menge U_t ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist.

$$U_t = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + x_2 - x_3 = t \right\}$$

[*8 Punkte*]

SS 16

Aufgabe 2

Welche der folgenden Mengen sind Unterräume von $M_{22}(\mathbb{Q})$?

(a) $U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a & a^2 \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

(b) $U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ -a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

(c) $U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Q} \right\}$

[*8 Punkte*]

SS 17

Aufgabe 3 ✓

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine lineare Abbikdung. Sei

$$U_f = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \mid f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} \}.$$

(a) Zeigen Sie, dass U_f ein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $U_f \cap \mathrm{Kern}(f) = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ gilt.

[*6 + 4 = 10 Punkte*]